Microéconomie S5

TD2 - Biens publics

Corrigé détaillé de l'exercice 4

Notons c le coût marginal de fourniture du bien public (dans cet exercice $c = 10$).
Le programme de maximisation d'un planificateur social bienveillant est:

$$\max_{x,y_1,y_2,y_3,t_1,t_2,t_3} U_1(x, y_1) + U_2(x, y_2) + U_3(x, y_3) = x(y_1 + y_2 + y_3)$$

sous les contraintes suivantes:

$$t_i + y_i \leq w_i \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ (contraintes de faisabilité)}$$

$$t_1 + t_2 + t_3 \geq CT(x) = cx \text{ (contrainte de financement)}$$

$$x \geq 0,\ y_i \geq 0 \text{ pour } i = 1, 2, 3 \text{ (contraintes de positivité)}$$

La fonction objectif $U_1(x, y_1)+U_2(x, y_2)+U_3(x, y_3)$ est strictement croissante en y_1, y_2 et y_3 donc les trois contraintes de faisabilité sont nécessairement saturées (au point solution), c'est-à-dire: $t_i + y_i = w_i$ pour $i = 1, 2, 3$.
Nous pouvons donc remplacer dans la fonction objectif y_i par $w_i - t_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Nous obtenons ainsi le programme de maximisation suivant:

$$\max_{x,,t_1,t_2,t_3} = x(w_1 - t_1 + w_2 - t_2 + w_3 - t_3) = x[(w_1 + w_2 + w_3) - (t_1 + t_2 + t_3)]$$

sous les contraintes:

$$t_1 + t_2 + t_3 \geq cx$$

$$x \geq 0, t_i \leq w_i \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

Remarque 1: Les contraintes de faisabilité n'apparaissent plus car nous les avons utilisées sous leur forme saturée pour remplacer chaque y_i par $w_i - t_i$. Par contre, la contrainte de positivité des y_i apparaît toujours mais sous la forme d'une contrainte sur les t_i. En effet $y_i = w_i - t_i \geq 0$ si et seulement $t_i \leq w_i$.

La fonction objectif $x[(w_1 + w_2 + w_3) - (t_1 + t_2 + t_3)]$ étant strictement décroissante en $(t_1 + t_2 + t_3)$, nous pouvons affirmer que la contrainte de financement est nécessairement saturée (au point solution), c'est-à-dire que $t_1 + t_2 + t_3 = cx$.

Nous pouvons donc remplacer $t_1 + t_2 + t_3$ par cx dans la fonction objectif. Nous obtenons ainsi le programme de maximisation suivant:

$$\max_x x\left[(w_1 + w_2 + w_3) - cx\right]$$

sous les contraintes:

$$x \geq 0$$
$$x \leq \frac{w_1 + w_2 + w_3}{c}$$

La seconde contrainte provient du fait que $t_i \leq w_i$ pour $i = 1, 2, 3$. En effet, ceci implique que $t_1 + t_2 + t_3 \leq w_1 + w_2 + w_3$ or $t_1 + t_2 + t_3 = cx$ donc $x \leq \frac{w_1+w_2+w_3}{c}$.
La c.p.o $(w_1 + w_2 + w_3) - cx - cx = 0$ donne la valeur $x = \frac{w_1+w_2+w_3}{2c}$ qui vérifie bien les deux contraintes sur x. Nous pouvons donc affirmer que le niveau socialement optimal est:

$$\boldsymbol{x^* = \frac{w_1 + w_2 + w_3}{2c}}$$

Avec $c = 10$, $w_1 = 30$, $w_2 = 50$ et $w_3 = 20$, on trouve:

$$\boldsymbol{x^* = 5}$$

Remarque 2: Une autre façon de procéder (qui est plus générale et plus rigoureuse sur le plan mathématique) consiste d'abord à vérifier qu'on n'a pas de solution en coin avant d'appliquer la c.p.o sous la forme d'une égalité. Dans le cas considéré ici, il faut examiner la possibilité d'une solution en coin aux deux bornes de l'intervalle de maximisation $\left[0, \frac{w_1+w_2+w_3}{c}\right]$ (dans le cours, on s'intéresse essentiellement à la solution en coin en 0). Pour cela, il faut calculer la dérivée de la fonction objectif aux points $x = 0$ et $x = \frac{w_1+w_2+w_3}{c}$. La dérivée est donnée par $(w_1 + w_2 + w_3) - 2cx$. Elle prend la valeur $w_1 + w_2 + w_3 > 0$ en $x = 0$ ce qui implique la fonction objectif est strictement croissante au voisinage de 0 et par conséquent 0 ne peut pas être un point où elle atteint un maximum sur l'intervalle $\left[0, \frac{w_1+w_2+w_3}{c}\right]$ (ceci se voit aisément sur un graphique). Par ailleurs, la dérivée prend la valeur $-(w_1 + w_2 + w_3) < 0$, ce qui implique que la fonction objectif est strictement décroissante au voisinage de $\frac{w_1+w_2+w_3}{c}$ et par conséquent $\frac{w_1+w_2+w_3}{c}$ ne peut pas être un point où elle atteint un maximum (là aussi, un graphique peut vous aider à comprendre). Une fois les deux solutions en coin exclues, nous sommes sûrs que nous avons une solution intérieure que nous pouvons déterminer en résolvant la condition du premier ordre.

Remarque 3: Nous ne vérifions pas la condition du second ordre du programme de maximisation, à savoir que la dérivée seconde la fonction objectif au point $\boldsymbol{x}^*$ est strictement négative, car elle est automatiquement satisfaite lorsque la fonction objectif est strictement concave (ce qui est systématiquement le cas dans le cours et les exercices de TD).